Il lemma di Baire e i teoremi di Banach-Steinhaus, della mappa aperta e del grafico chiuso.

SEMINARIO 2 AM310

a cura di

Sara Rossicone e Maria Chiara Timpone

1 ♠ Lemma di Baire

Definizione 1 (Spazio di Banach)**.** Definiamo *Spazio di Banach* uno spazio E normato e completo, ovvero uno spazio vettoriale su un campo K, dotato di una norma, tale che ogni successione di Cauchy converge a un elemento di E (rispetto alla metrica indotta dalla norma).

Lemma 1 (Baire)**.**
Sia X uno spazio metrico completo. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di chiusi. Supponiamo che

$$\mathrm{Int}X_n = \emptyset \text{ per ogni } n \geq 1 \Rightarrow Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \emptyset$$

Osservazione: Possiamo fornire anche un'altra formulazione del precedente Lemma maggiormente utilizzata per dimostrare i successivi risultati:

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di chiusi tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ allora esiste n_0 tale che $IntX_{n_0} \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Poniamo $O_n = (X_n)^c$ in modo tale che O_n siano densi; infatti: O_n rappresenta il complementare di un insieme composto da soli punti di frontiera e di conseguenza la chiusura di O_n in X ï¿½ X stesso.
Basterï¿½ mostrare che $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ ï¿½ denso in X, ciï¿½ implica che

$$\partial G = G^c = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right]^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

ovvero che $\mathrm{Int}\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$.
Sia A un aperto non vuoto di X; mostriamo che $A \cap G \neq \emptyset$. Indichiamo la palla aperta di centro x e raggio $r > 0$ con $B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$.
Scegliamo $x_0 \in A$ e $r_0 > 0$ tali che $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset A$. Quest'operazione ï¿½ sempre possibile poichï¿½ A ï¿½ aperto, cioï¿½ per ogni $a \in A$ possiamo trovare una palla aperta di centro a e raggio r_a interamente contenuta in A e basterï¿½ scegliere $\overline{r} < r_a$ in modo tale che $\overline{B_{\overline{r}}(a)} \subset A$.
Sia ora $x_1 \in B_{r_0}(x_0) \cap O_1$ e $r_1 > 0$ tale che

$$\begin{cases} \overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{r_0}(x_0) \cap O_1 \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Possiamo, dunque costruire per ricorrenza due successioni x_n e r_n tali che

$$\begin{cases} \overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n) \cap O_{n+1} \\ 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \end{cases}$$

Segue che per come ï¿½ definita x_n ï¿½ di Cauchy ï¿½, poichï¿½ X ï¿½ di Banach si ha che $x_n \to l$ con $l \in X$. In particolare $l \in A \cap G$. □

Esempi:

1. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia euclidea. Si ha che $\mathbb{R}^2$ non puï¿½ essere unione numerabile di rette; infatti, se cosï¿½ fosse avremmo che $\mathbb{R}^2$ sarebbe unione numerabile di chiusi con interno vuoto in contraddizione con il Lemma appena dimostrato.

2. L'ipotesi di completezza ï¿½ necessaria. Sia $X = \mathbb{Q}$ dotato della topologia indotta dalla metrica di $\mathbb{R}$. X non ï¿½ completo; ad esempio, la successione di Cauchy di numeri razionali $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ converge al numero irrazionale e. In questo caso non ï¿½ possibile applicare il Lemma; infatti $\mathbb{Q}$ ï¿½ unione numerabile dei suoi punti e $\{q\} = [\mathbb{Q} - \{q\}]^c = [\mathbb{Q} \cap (-\infty, q) \cup (q, \infty)]^c$ ï¿½ chiuso in quanto complementare di un'aperto e ha interno vuoto.

2 ♠ Teorema Banach-Steinhaus

Notazioni:
Siano E e F due spazi vettoriali normati. Indichiamo con $\mathscr{L}(E, F)$lo spazio degli operatori lineari e continui di E in F dotato della norma

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

Denotiamo con E' il duale topologico-algebrico di E, ovvero lo spazio delle forme (o funzionali) lineari continue su E; E' ï¿½ dotato della norma

$$\|\Lambda\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|\Lambda x\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\Lambda x|.$$

Se $\Lambda \in E'$ e $x \in E$ indicheremo $\Lambda(x)$ con $< \Lambda, x >$ e definiremo $<, >$ il prodotto scalare nella dualitï¿½ E' di E.

Teorema 1 (Banach-Steinhaus o Principio dell'uniforme limitatezza)**.**
Siano E e F sue spazi di Banach. Sia $\{T_i\}_{i \in I}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di operatori lineari e continui di E in F. Supponiamo che

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E \tag{1}$$

Allora:

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty \tag{2}$$

Equivalentemente esiste una costante c tale che

$$\|T_i x\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E \quad \forall i \in I.$$

Dimostrazione. Per ogni intero $n \geq 1$ poniamo

$$X_n = \{x \in E : \forall i \in I \quad \|T_i x\| \leq n\}$$

in modo tale che X_n ï¿½ chiuso e, grazie a (1) si ha

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

Dal Lemma di Baire segue che esiste un $n_0 \geq 0$ tale che $\mathrm{Int} X_{n_0} \neq \emptyset$.
Siano $x_0 \in E$ e $r > 0$ tali che $B_r(x_0) \subset X_{n_0}$. Si ha

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad \forall i \in I, \quad \forall z \in B_1(0)$$

quindi $\forall z \in B_1(0)$ otteniamo

$$r\|T_i z\| = \|T_i rz\| = \|T_i(rz + x_0) - T_i(x_0)\| \leq \|T_i(rz + x_0)\| + \|T_i(x_0)\| \leq n_0 + \|T_i x_0\|$$

infine, passando al sup su $\|z\| \leq 1$, grazie alla continuitï¿½ dei T_i segue

$$r\|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} = r \sup_{\|z\| \leq 1, z \in E} \|T_i z\| \leq n_0 + \|T_i x_0\|.$$

da cui l'asserto. □

Osservazione: Il converso del teorema di Banach-Steinhaus afferma che se $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \infty$ allora esiste almeno un $x \in E$ tale che

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| = \infty.$$

In realtï¿½, ciï¿½ ï¿½ vero per tutti gli x appartenenti ad un qualche insieme denso in E ottenuto come intersezione numerabile d'aperti.

Definizione 2 (Debole convergenza)**.** Sia E uno spazio di Banach e siano x_n e x appartenenti a E. Diciamo che x_n converge debolmente a x, $x_n \rightharpoonup x$ se $\Lambda x_n \to \Lambda x$ per ogni $\Lambda \in E'$

Corollario 1.
Se $x_n \rightharpoonup x$ allora x_n ï¿½ limitata.

Dimostrazione. Definiamo $T_n : E' \to \mathbb{R}$ con

$$T_n(\Lambda) = \Lambda x_n$$

Si ha che $\|T_n\| = \|x_n\|$ infatti:

$$\|x_n\| =^{1} \sup_{\Lambda \in E', \|\Lambda\| \leq 1} |\Lambda x_n| = \sup_{\|\Lambda\| \leq 1} |T_n \Lambda| = \|T_n\|.$$

Se per assurdo si avesse che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| = \infty$ questo implicherebbe che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$ allora per il teorema di Banach-Steinhaus esiste un $\overline{\Lambda} \in E'$ tale che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(\overline{\Lambda})\| = \infty$.

[1] l'uguaglianza vale per un corollario al teorema di Hahn Banach

Allora esiste una sottosuccessione T_{n_k} che realizza questo sup ovvero tale che $T_{n_k}(\overline{\Lambda}) \overset{k\to\infty}{\to} \infty$.
Dunque

$$|T_{n_k}(\overline{\Lambda})| = |\overline{\Lambda}(x_{n_k})| \overset{k\to\infty}{\to} |\overline{\Lambda}x| < \infty$$

ma ciï¿½ ï¿½ assurdo.

□

Vediamo ora qualche corollario al teorema di Banach-Steinhaus

Corollario 2.
Siano E e F due spazi di Banach. Sia T_n una successione di operatori lineari e continui di E in F tali che per ogni $x \in E$, $T_n x$ converge, per $n \to \infty$, verso un limite indicato con Tx. Allora si ha

$$\sup_n \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty \tag{3}$$

$$T \in \mathscr{L}(E,F) \tag{4}$$

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}. \tag{5}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la (3) segue immediatamente dal teorema di Banach-Steinhaus. Per quanto visto esiste dunque una costante c tale che

$$\|T_n x\| \leq c\|x\| \quad \forall n, \quad \forall x \in E.$$

al limite si mantiene la disuguaglianza larga, ottenendo

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E.$$

E' chiaro, inoltre, che T ï¿½ lineare (limite di operatori lineari) da cui segue (4).
Infine si ha $\|T_n x\| \leq \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}\|x\| \quad \forall x \in E$ da cui segue (5). Infatti:

$$\frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$$

da cui, applicando il $\liminf$ ad ambo i membri della diseguaglianza, si ottiene

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \liminf_n \frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$$

possiamo dunque passare al sup poichï¿½ la diseguaglianza ï¿½ vera per ogni x in E $(x \neq 0)$, applicare la linearitï¿½ di T ed ottenere

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \|T\frac{x}{\|x\|}\| \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

□

Corollario 3.
Sia G uno spazio di Banach e sia B un sottoinsieme di G. Supponiamo che

$$\text{per ogni } \Lambda \in G' \text{ l'insieme } \Lambda(B) = \bigcup_{x\in B} <\Lambda, x> \text{ ï¿}\frac{1}{2} \text{ limitato (in } \mathbb{R}). \tag{6}$$

Allora B ï¿½ limitato.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Banach-Steinhaus con $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ e $I = B$. Per ogni $b \in B$ poniamo

$$T_b(\Lambda) =< \Lambda, b >, \quad \Lambda \in E = G'$$

in questo modo si ha

$$\sup_{b \in B} |T_b(\Lambda)| < \infty \quad \forall \Lambda \in G'.$$

Per il teorema di Banach- Steinhaus, esiste una costante c tale che

$$| < \Lambda, b > | \leq c\|\Lambda\| \quad \forall \Lambda \in G' \quad \forall b \in B$$

Applichiamo ora il corollario del teorema di Hahn-Banach che afferma che:

$$\forall x \in E \text{ si ha } \|x\| = \sup_{\Lambda \in E', \|\Lambda\| \leq 1} | < \Lambda, x > |$$

si ottiene che

$$\|b\| = \sup_{\Lambda \in G', \|\Lambda\| \leq 1} | < \Lambda, b > | \leq c \quad \forall b \in B.$$

□

Possiamo enunciare il precedente corollario sostituendo a B il duale di B:

Corollario 4.
Sia G uno spazio di Banach e sia B' un sottoinsieme di G'. Supponiamo che

$$\text{per ogni } \Lambda \in G' \text{ l'insieme } < B', x >= \bigcup_{x \in B} < \Lambda, x > \text{ ï¿}\frac{1}{2} \text{ limitato (in } \mathbb{R}). \tag{7}$$

Allora B' ï¿$\frac{1}{2}$ limitato.

Dimostrazione. Applichiamo teorema di Banach-Steinhaus con $E = G$, $F = \mathbb{R}$ e $I = B'$. Per ogni $\Lambda \in B'$, poniamo

$$T_\Lambda(x) =< \Lambda, x > \quad (x \in G)$$

e allora esiste una costante c tale che $| < \Lambda, x > | \leq c\|x\| \quad \forall \Lambda \in B' \quad \forall x \in G$.
Dalla definizione di norma duale ($\Lambda(x) =< \Lambda, x >$) si ha

$$\|\Lambda(x)\| = | < \Lambda, x > | \leq c\|x\| \quad \forall \Lambda \in B' \quad \forall x \in G$$

che implica

$$\|\Lambda\| \leq c \quad \forall \Lambda \in B'.$$

3 ♠ Teoremi della mappa aperta e del grafico chiuso

Teorema 2 (Teorema dell'applicazione aperta)**.**
Siano E e F due spazi di Banach e sia T un operatore lineare continuo e suriettivo di E su F. Allora esiste una costante $c > 0$ tale che

$$T(B_1^E(0)) \supset B_c^F(0). \tag{8}$$

Osservazione 1

La proprietï¿½ (8) implica che T trasforma ogni aperto di E in un aperto di F.

Infatti, sia U un aperto di E; dimostriamo che $T(U)$ ï¿½ aperto se T soddisfa la proprietï¿½ (8).

Sia $y_0 \in T(U)$ allora esiste $x_0 \in U$ tale che $y_0 = T(x_0)$.

Sia, ora, $r > 0$ tale che $B_r^E(x_0) \subset U$ (U ï¿½ aperto), cioï¿½ $x_0 + B_r^E(0) \subset U$. Allora applicando T ad ambo i membri e ricordando che T ï¿½ un'operatore lineare, si ha

$$y_0 + T(B_r^E(0)) = T(x_0 + B_r^E(0)) \subset T(U).$$

Ora, poichï¿½ T soddisfa la proprietï¿½ (8), si ha

$$T(B_r^E(0)) \supset B_{rc}^F(0)$$

e di conseguenza

$$B_{rc}^F(y_0) = y_0 + B_{rc}^F(0) \subset y_0 + T(B_r^E(0)) \subset T(U).$$

$\square$

Dimostrazione. (Teorema 2). Proviamo il teorema procedendo per passi:

- Sia T un operatore lineare suriettivo di E su F. Allora esite $c > 0$ tale che

$$\overline{T(B_1(0))} \supset B_{2c}(0). \tag{9}$$

Infatti, poniamo $X_n = n\overline{T(B_1(0))}$, poichï¿½ T ï¿½ suriettivo, si ha che $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$ e grazie al lemma di Baire sappiamo che esiste n_0 tale che $\mathrm{Int}X_{n_0} \neq \emptyset$. Ne segue che

$$\mathrm{Int}[\overline{T(B_1(0))}] \neq \emptyset.$$

Siano $c > 0$ e $y_0 \in \overline{T(B_1(0))} \subset F$ tali che

$$B_{4c}(y_0) \subset \overline{T(B_1(0))}. \tag{10}$$

per simmetria di $B_1(0)$ e conseguentemente di $\overline{T(B_1(0))}$ si ha

$$-y_0 \in \overline{T(B_1(0))}. \tag{11}$$

Per addizione di (10) e (11) si ottiene

$$B_{4c}(0) \subset \overline{T(B_1(0))} + \overline{T(B_1(0))}.$$

Ora $T(B_1(0))$ ï¿½ convesso in F; infatti, presi comunque $T(x)$,$T(y) \in T(B_1(0))$ e $t \in [0,1]$ si ha

$$tT(x) + (1-t)T(y) = (\underbrace{T(tx + (1-t)y)}_{\in B_1(0) \text{ poichï¿½ ï¿½ convesso}}) \in T(B_1(0)).$$

Inoltre, se $T(B_1(0))$ ï¿½ convesso, anche $\overline{T(B_1(0))}$ ï¿½ convesso. Infatti, se x,$y \in \overline{C}$, con C convesso, allora esistono x_n,$y_n \in C$ tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Quindi, per ogni n e $t \in [0,1]$ si ha

$$tx_n + (1-t)y_n \in C.$$

Allora passando al limite otteniamo $tx+(1-t)y \in \overline{C}$. Infine, dato C convesso abbiamo che

$$C + C = 2C$$

infatti,$C + C \subset 2C$ poichï¿½ presi $x, y \in C$ si ha $x + y = 2\frac{x+y}{2} \in 2C$. Viceversa $2C \subset C + C$ perchï¿½ preso x in $2C$, $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \in C + C$.
Da ciï¿½ otteniamo che

$$\overline{T(B_1(0))} + \overline{T(B_1(0))} = 2\overline{T(B_1(0))}$$

da cui (9).

- Sia T un operatore lineare continuo di E in F che verifichi la (9). Allora si ha

$$T(B_1(0)) \supset B_c(0) \tag{12}$$

Fissiamo $y \in F$ con $\|y\| < c$. Poichï¿½ T ï¿½ suriettivo, cerchiamo $x \in E$ tale che

$$\|x\| < 1 \text{ e } Tx = y$$

Da (9) si deduce che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists z \in E \text{ con } \|z\| < \frac{1}{2} \text{ e } \|y - Tz\| < \epsilon \tag{13}$$

Scegliamo $\epsilon = \frac{c}{2}$ e otteniamo un z_1 in E con

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \text{ e } \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}$$

Applichiamo lo stesso procedimento sostituendo $y - Tz_1$ a y e con $\epsilon = \frac{c}{4}$. Cosï¿½ facendo otteniamo un $z_2 \in E$ tale che

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \text{ e } \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4}$$

Si costruisce, in questo modo, una successione per ricorrenza $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ e } \|(y - T(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \quad \forall n.$$

Pertanto la successione $x_n = (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$ ï¿½ di Cauchy. Sia $x_n \to x$; $\|x\| < 1$ e $y = Tx$ in quanto T ï¿½ continuo.

□

Vediamo, ora, una conseguenza immediata del Teorema dell'applicazione aperta.

Corollario 5 (Teorema d'isomorfismo)**.** Siano E e F due spazi di Banach e sia T un operatore continuo e biettivo di E su F. Allora T^{-1} ï¿½ un operatore continuo di F in E.

Dimostrazione. Dalla relazione (8) abbiamo che per ogni $x \in E$ tale che $\|Tx\| < c$, allora $\|x\| < 1$. Segue per omogeneitï¿½ che

$$\|x\| \leq \frac{1}{k}\|Tx\| \quad \forall x \in E$$

Infatti, scegliendo $\overline{x} := \frac{cx}{2\|Tx\|}$, avremo che

$$\|T\overline{x}\| = \|T\frac{cx}{2\|Tx\|}\| = \frac{c}{2\|Tx\|}\|Tx\| = \frac{c}{2} < c$$

segue che

$$\|\frac{cx}{2\|Tx\|}\| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| < \frac{2}{c}\|Tx\|$$

basterï¿½ scegliere $k = \frac{c}{2}$. Per dimostrare la continuitï¿½ di T^{-1} partiamo dalla relazione $\|Tx\| > k\|x\|$. Poichï¿½ T ï¿½ biettiva esisterï¿½ un unico $y \in F$ tale che $x = T^{-1}y$; dunque

$$\|T(T^{-1}y)\| = \|Tx\| > k\|x\| = k\|T^{-1}y\| \quad \Rightarrow \quad \|T^{-1}y\| < \frac{1}{k}\|y\|$$

da cui T^{-1} ï¿½ limitato $\Rightarrow$ T^{-1} ï¿½ continuo. $\square$

Teorema 3 (Teorema del grafico chiuso)**.**
Siano E ed F due spazi di Banach. Sia T un operatore lineare di E in F. Supponiamo che il grafico di T, $G(T)$, sia chiuso in $E \times F$. Allora T ï¿½ continuo.

Dimostrazione. La topologia prodotto sullo spazio vettoriale $E \times F$ ï¿½ definita dalla norma

$$\|(x,y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

Conseguentemente $G(T)$ che ï¿½ sottospazio di $E \times F$ chiuso puï¿½ essere dotato della norma indotta, che ï¿½ detta *norma del grafico*

$$\|(x,Tx)| \ = \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad x \in E$$

$G(T)$ dotatao della norma del grafico ï¿½ di Banach. Consideriamo quindi le proiezioni:

$$\Pi_1 : G(T) \to E \qquad \Pi_1(x,Tx) = x$$

$$\Pi_2 : G(T) \to F \qquad \Pi_2(x,Tx) = Tx$$

Π_1 e Π_2 sono lineari e continui e Π_1 ï¿½ una biiezione e per il corollario del teorema della funzione aperta allora l'operatore inverso:

$$\Pi_1^{-1} : E \to G(T)$$

ï¿½ lineare e continuo.
Dunque $T = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1} : E \to G(T) \to F$ ï¿½ continuo. $\square$

Osservazione: L'ipotesitï¿½ di linearitï¿½ ï¿½ necessaria; infatti, prendendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f non ï¿½ continua pur tuttavia $G(T)$ ï¿½ chiuso.

Applicazione:
Dato Y sottospazio chiuso di E spazio di Banach, allora esiste X sottospazio chiuso di E tale che E si scrive come somma diretta di X e Y se e solo se esiste un proiettore continuo tale che $P(E) = Y$.
Infatti, se $P : E \to E$ ï¿½ un proiettore continuo tale che $P(E) = Y$, consideriamo il sottospazio chiuso $X = (I - P)(E)$. Chiaramente $E = X \oplus Y$.
Viceversa supponiamo che $E = Y \oplus X$ con X sottospazio chiuso di E. Allora, per ogni

$x \in E$, esistono $x_1 \in Y$ e $x_2 \in X$ univocamente determinati tali che $x = x_1 + x_2$.
Definiamo ora $P : E \to E$ in modo tale che $P(x) = x_1 \quad \forall x \in E$. E' chiaro che P ï¿½ un operatore lineare, P ï¿½ un proiettore ($P^2 = P$) e $P(E) = Y$. Per dimostrare che P ï¿½ continuo sarï¿½ sufficiente far vedere che il grafico di P ï¿½ chiuso cioï¿½ che se $(z_n, P(z_n)) \in G(P)$ ï¿½ tale che $(z_n, P(z_n) \to (z, y)$ allora $y = P(z)$.
Sia $z_n \to z$ e $P(z_n) \to y$ allora $y \in Y$ poichï¿½ Y ï¿½ chiuso. D'altra parte $z_n - P(z_n) \in X$ $\forall n$ e $z_n - P(z_n) \to z - y \quad \Rightarrow \quad x = z - y \in X$.
Abbiamo quindi che $z = y + x \in Y \oplus X$; da cui $y = P(z)$ per come abbiamo definito P.

4 ♠ Applicazione alle serie di Fourier

4.1 ♠ Un problema di convergenza

E' vero che $\forall f \in C(S^1)$ la serie di Fourier di f converge ad $f(x)$ in ogni punto x? No.

Prima di procedere all'argomentazione della precedente affermazione enunciamo alcuni risultati utili ai fini della trattazione.
Indichiamo con $C_C(X)$ le funzioni complesse continue su X a supporto compatto, dove con *supporto* intendiamo la chiusura dell'insieme $\{x : f(x) \neq 0\}$.
D'ora in avanti X sarï¿½ uno spazio di Hausdorff localmente compatto e μ una misura Borel regolare su X.

Teorema 4 (Teorema di Lusin)**.** Sia f una funzione misurabile complessa su X, $\mu(A) < \infty$, $f(x) = 0$ se $x \neq A$ ed $\epsilon > 0$.
Esiste allora una $g \in C_C(X)$ tale che

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$$

Inoltre, possiamo scegliere la funzione g in modo tale che

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Teorema 5. Per $1 \leq p < \infty$, $C_C(X)$ ï¿½ denso in $L^p(X)$.

Dimostrazione. Sia S la classe di tutte le funzioni complesse misurabili semplici su X, tali che

$$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Per il teorema di Lusin, se $s \in S$ ed $\epsilon > 0$ esiste una $g \in C_c(X)$ tale che $g(x) = s(x)$ al di fuori di un insieme di misura minore di ϵ ed ï¿½ $|g| \leq \|s\|_\infty$. Quindi

$$\|g - s\|_p^p = \int_{\{x : g(x) \neq s(x)\}} |g - s|^p \leq 2^p \int_{\{x : g(x) \neq s(x)\}} \left(|g|^p + \|s\|_\infty^p\right) \leq$$

$$\leq 2^{p+1} \int_{\{x : g(x) \neq s(x)\}} \left(\|s\|_\infty^p\right) \leq 2^{p+1} \epsilon \|s\|_\infty^p$$

da cui

$$\|g - s\|_p \leq 2\epsilon^{\frac{1}{p}} \|s\|_\infty.$$

Per completare la dimostrazione sarï¿½ sufficiente dimostrare che $S \subset L^p(X)$ ï¿½ denso in $L^p(X)$.

Supponiamo $f \in L^p(X)$; sia $\{s_n\}$ una successione di funzioni semplici tale che $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ e $s_n \to f$ puntualmente. Poichï¿½ $0 \leq s_n \leq f$, si ha $s_n \in L^p(X)$ e $s_n \in S$. Inoltre, $|f - s_n|^p \leq f^p$ e, per il teorema della convergenza dominata, $\|f - s_n\|_p \to 0$ per $n \to \infty$. Dunque f ï¿½ nella chiusura di S in $L^p(X)$. $\square$

Notazioni:

Indichiamo con $L^p(S^1)$ per $1 \leq p < +\infty$ la classe di tutte le funzioni complesse, misurabili secondo Lebesgue, con periodo 2π su $\mathbb{R}$, di norma

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

finita. Il fattore $\frac{1}{2\pi}$ ï¿½ utile al solo fine di semplificare i conti.

Possiamo procedere nel dimostrare la nostra affermazione iniziale.

Ricordiamo che l'$n-$sima somma parziale della serie di Fourier di f nel punto x ï¿½ data dalla

$$s_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \tag{14}$$

con

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad \textit{(Nucleo di Dirichlet)} \tag{15}$$

Il problema dunque consiste nel verificare che

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f;x) = f(x) \quad \forall f \in C(S^1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sappiamo che le somme parziali convergono nella norma L^2 ad f pertanto ogni $f \in L^2(S^1)$ ï¿½ il limite puntuale q.o. di una sottosuccessione della successione delle somme parziali. Ciï¿½ perï¿½ non ï¿½ sufficiente a dimostrare l'asserto e il teorema di Banach-Steinhaus confermerï¿½ l'affermazione iniziale.

Poniamo

$$s^*(f;x) = \sup_n |s_n(f;x)|. \tag{16}$$

Sia $x = 0$ e definiamo

$$\Lambda_n f = s_n(f;0) \quad f \in C(S^1). \tag{17}$$

Sappiamo che $C(S^1)$ ï¿½ uno spazio di Banach realtivo alla norma estremo superiore

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S^1} |f(x)|.$$

Per definizione Λ_n ï¿½ una forma lineare su $C(S^1)$, di norma

$$\|\Lambda_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \mathrm{dt} = \|D_n\|_1.$$

Affermiamo che

$$\|\Lambda_n\| \overset{n\to\infty}{\to} \infty$$

e lo dimostreremo provando che $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$ e che

$$\|D_n\|_1 \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Cominciamo con il far vedere che $\|D_n\|_1 \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$; infatti, moltiplicando la (15) per $e^{\frac{it}{2}}$ e poi per $e^{\frac{-it}{2}}$, e sottraendo una delle due equazioni risultanti dall'altra, otteniamo

$$D_n(t) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Poichï¿½ $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ la precedente relazione mostra che

$$\|D_n\|_1 > \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\right| \frac{dt}{t} \stackrel{v=(n+\frac{1}{2})t}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin v| \frac{dv}{v} >$$

$$> \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin v| dv = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$$

Successivamente, fissiamo n, e poniamo $g(t) = \begin{cases} 1 & D_n(t) \geq 0 \\ -1 & D_n(t) < 0 \end{cases}$.

Allora esiste una $f_j \in C(S^1)$ tale che $-1 \leq f_j \leq 1$ e $f_j(t) \stackrel{j\to\infty}{\to} g(t)$ per ogni t. Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si ha che

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)D_n(-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = \|D_n\|_1$$

Possiamo quindi concludere che valga l'uguaglianza, cioï¿½ che $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_1$, ed ï¿½ cosï¿½ dimostrato che $\|\Lambda_n\| \to \infty$ per $n \to \infty$.

Applichiamo ora il teorema di Banach-Steinhaus con $T_n = \Lambda_n$, $E = C(S^1)$ e $F = \mathbb{R}$ e, poichï¿½ $\|\Lambda_n\| \to \infty$, si avrï¿½ che $s^*(f;0) = \infty$ per ogni $f \in E_0$ dove con E_0 indichiamo un insieme denso in $C(S^1)$ ottenuto come intersezione numerabile di aperti densi in $C(S^1)$. Osserviamo che il risultato non dipende dalla scelta di $x = 0$ e che quindi ï¿½ valido per ogni x; ne concludiamo che

Ad ogni $x \in \mathbb{R}$ corrisponde un insieme denso $E_x \subset C(S^1)$, ottenuto come intersezione numerabile di aperti densi in $C(S^1)$, tale che $s^*(f;x) = \infty$ per ogni $f \in E_x$.

In particolare, la serie di Fourier di ogni f in E_x diverge in x e abbiamo dimostrato cosï¿½ la risposta negativa data all'inizio della trattazione. Questo risultato puï¿½ ancora essere migliorato.

Consideriamo un insieme numerabile di punti x_i e definiamo

$$E \stackrel{def}{=} \bigcap E_{x_i} \quad E_{x_i} \subset C(S^1).$$

Per il Lemma di Baire, E ï¿½ denso in $C(S^1)$ e, inoltre, per ogni $f \in E$ si ha

$$s^*(f;x) = \infty \quad \forall x_i.$$

Se i punti x_i sono scelti in modo tale che la loro unione sia densa in $(-\pi, \pi)$, applicando il seguente teorema, otteniamo che E (cosï¿½ come ciascuno degli E_{x_i}) ï¿½ non numerabile.

Teorema 6.
In uno spazio metrico completo, X privo di punti isolati nessun insieme denso e numerabile ï¿½ ottenuto come intersezione numerabile di aperti.

Dimostrazione. Siano x_k i punti di un insieme denso e numerabile E in X e supponiamo che

$$E = \bigcap_n V_n \quad \text{con } V_n \text{ aperto e denso in } X$$

Posto

$$W_n = V_n - \bigcup_{k=1}^{n} x_k,$$

ogni W_n ï¿½ ancora un insieme denso e aperto ma $\bigcap W_n = \emptyset$, in contraddizione con il Lemma di Baire. $\square$

4.2 ♠ Coefficienti di Fourier di funzioni L^1

Associamo ad ogni $f \in L^1(S^1)$ una funzione $\widehat{f}$ su $\mathbb{Z}$ definita dalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{18}$$

Si verifica facilmente che $\widehat{f}(n) \to 0$ quando $|n| \to \infty \quad \forall f \in L^1$.
Sappiamo infatti che $C(S^1)$ ï¿½ denso in $L^1(S^1)$ e che i polinomi trigonometrici sono densi in $C(S^1)$. Se $\epsilon > 0$ ed $f \in L^1(S^1)$, ne segue che esiste un $g \in C(S^1)$ e un polinomio trigonometrico P tale che $\|f - g\|_1 < \epsilon$ e $\|g - P\|_\infty < \epsilon$. Essendo

$$\|g - P\|_1 \leq \|g - P\|_\infty$$

segue da ciï¿½ che $\|f - P\|_1 < 2\epsilon$. Se $|n|$ ï¿½ abbastanza grande (in relazione a P) si ha

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(t) - P(t)\}e^{-int}dt\right| \leq \|f - P\|_1 < 2\epsilon. \tag{19}$$

Dunque $\widehat{f}(n) \to 0$ per $n \to \infty$.
Ci chiediamo, ora, se valga anche l'inverso. In altre parole, se $\{a_n\}$ ï¿½ una successione di numeri complessi tale che $a_n \to 0$ per $n \to \pm\infty$, esiste una $f \in L^1(S^1)$ tale che $\widehat{f}(n) = a_n$ per tutti gli $n \in \mathbb{Z}$? No.
Ci avvarremo del Teorema d'isomorfismo per giustificare la precedente affermazione.
Premettiamo la seguente definizione e un teorema:

Definizione 3. Diremo che una funzione f su uno spazio di Hausdorff X localmente compatto *tende a zero all'infinito* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset X$ tale che $|f(x)| < \epsilon$ per tutti gli x fuori di K.

Notazioni:
Indichiamo con $C_0(X)$ la classe di tutte le funzioni continue f su X che tende a zero all'infinito.

Teorema 7. Se X ï¿½ uno spazio di Hausdorff localmente compatto, $C_0(X)$ ï¿½ denso e completo in $C_C(X)$ rispetto alla metrica definita dall'estremo superiore.

Di conseguenza, se indichiamo con c_0 lo spazio di tutte le funzioni complesse φ su $\mathbb{Z}$ tali che $\varphi(n) \to 0$ per $n \to \pm\infty$, con la norma dell'estremo superiore

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| \,:\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si vede che c_0 ï¿½ uno spazio di Banach. Infatti, supponendo aperto ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ ï¿½ uno spazio di Hausdorff localmente compatto, e c_0 non ï¿½ altro che $C_0(\mathbb{Z})$.
Vediamo ora il teorema che giustifica la nostra affermazione iniziale:

Teorema 8. L'applicazione $f \to \widehat{f}$ ï¿½ un 'applicazione lineare, limitata e iniettiva da $L^1(S^1)$ in c_0 ma non ï¿½ suriettiva su c_0.

Dimostrazione. Definiamo Λ ponendo $\Lambda f = \widehat{f}$. Λ ï¿½ lineare. Abbiamo dimostrato che Λ applica $L^1(S^1)$ in c_0 e la (18) mostra che $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, quindi $\|\Lambda\| \leq 1$. Mostriamo ora che Λ ï¿½ iniettiva. Prendiamo un $f \in L^1(S^1)$ tale che $\widehat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(t)dt = 0 \tag{20}$$

per ogni polinomio trigonometrico P; infatti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} = 2\pi\widehat{f}(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Adesso, poichï¿½ i polinomi trigonometrici sono densi in $C(S^1)$, per ogni $g \in C(S^1)$ esiste una successione di polinomi trigonometrici p_n convergenti uniformemente a g; dunque il risultato si estende alle funzioni continue su S^1.
Risulta, inoltre, che le funzioni continue sono dense in $L^1(S^1)$ dunque, preso un insieme misurabile E qualsiasi in S^1 si puï¿½ sempre trovare una successione di funzioni continue g_n su S^1 tali che $|g_n| \leq 1$, $g_n \to \chi_E$ da cui, applicando il teorema di Lebesgue, si ha

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} f(t)g_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\chi_E = \int_E f(t)$$

Ma $\int_E f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ quasi ovunque.
Se l'immagine di Λ fosse tutto c_0 per il Teorema d'isomorfismo esisterebbe un $\delta > 0$ tale che

$$\|\widehat{f}\|_\infty \geq \delta\|f\|_1 \qquad \forall f \in L^1(S^1).$$

Ma per come abbiamo definito la (15) allora $D_n \in L^1(S^1)$, $\quad \|\widehat{D}_n\|_\infty = 1$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$; infatti:

$$\|\widehat{D}_n\|_\infty = \sup_h \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}e^{-iht} \right) dt \right|$$

Ora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(k-h)it} = \begin{cases} 1 & k = h \\ 0 & k \neq h \end{cases}$$

da cui $\|\widehat{D}_n\|_\infty = 1$ mentre $\|D_n\|_1 \to \infty$ per $n \to \infty$.
Non esiste quindi nessun $\delta > 0$ per il quale siano valide le disuguaglianze

$$\|\widehat{D}_n\|_\infty \geq \delta\|D_n\|_1 \qquad \forall n.$$

$\square$